10. Präsenzübung zur Analytischen Mechanik und Speziellen Relativität, WS 2016/17

(zu bearbeiten am Dienstag, 10.01.2017)

Aufgabe P20 *Vektorfelder und Integralkurven*

Betrachten sie das Vektorfeld $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ als Spezialfall von $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_x(x,y) \\ K_y(x,y) \end{pmatrix}$ für die folgenden Matrizen A :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie jeweils das Vektorfeld $\vec{K}(\vec{r}) = A \cdot \vec{r}$ und zeichnen Sie die Integralkurven.

Aufgabe P21 *Anharmonischer Oszillator*

Es soll die Differentialgleichung $\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\beta x^3$ mit Hilfe des Reihenansatzes $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + \cdots$ gelöst werden. Startet man dabei mit dem Ansatz $x^{(1)} = x_0 \cos \omega_0 t$, so erhält man in 3. Ordnung die Gleichung

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -\beta\, x_0^3 \cos^3 \omega_0 t = -\beta\, x_0^3 \left(\tfrac{3}{4} \cos \omega_0 t + \tfrac{1}{4} \cos 3\, \omega_0 t \right).$$

Diese Gleichung hat zeitlich anwachsende Lösungen (warum?), d.h. die Störungreihe $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + \cdots$ konvergiert mit dem Ansatz $x^{(1)} = x_0 \cos \omega_0 t$ nicht. Deshalb macht man den Ansatz $x^{(1)} = x_0 \cos \omega t$, $\omega \neq \omega_0$, wobei ω die exakte Schwingungsfrequenz des anharmonischen Oszillators sein soll. ω wird dabei ebenfalls iterativ, $\omega = \omega^{(0)} + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \cdots$, berechnet. Setzen Sie den Ansatz $x^{(1)} = x_0 \cos \omega t$ in die Differentialgleichung ein und berücksichtigen Sie alle Terme bis zur 3. Ordnung ($x^{(\nu)}, \omega^{(\nu)} \sim x_0^\nu$). Lösen Sie die Differentialgleichung Ordnung für Ordnung, wobei $\omega^{(\nu)}$ dadurch bestimmt wird, dass Terme $\sim \cos \omega t$, die zeitlich divergierende Lösungen liefern würden, in der entsprechenden Ordnung verschwinden.